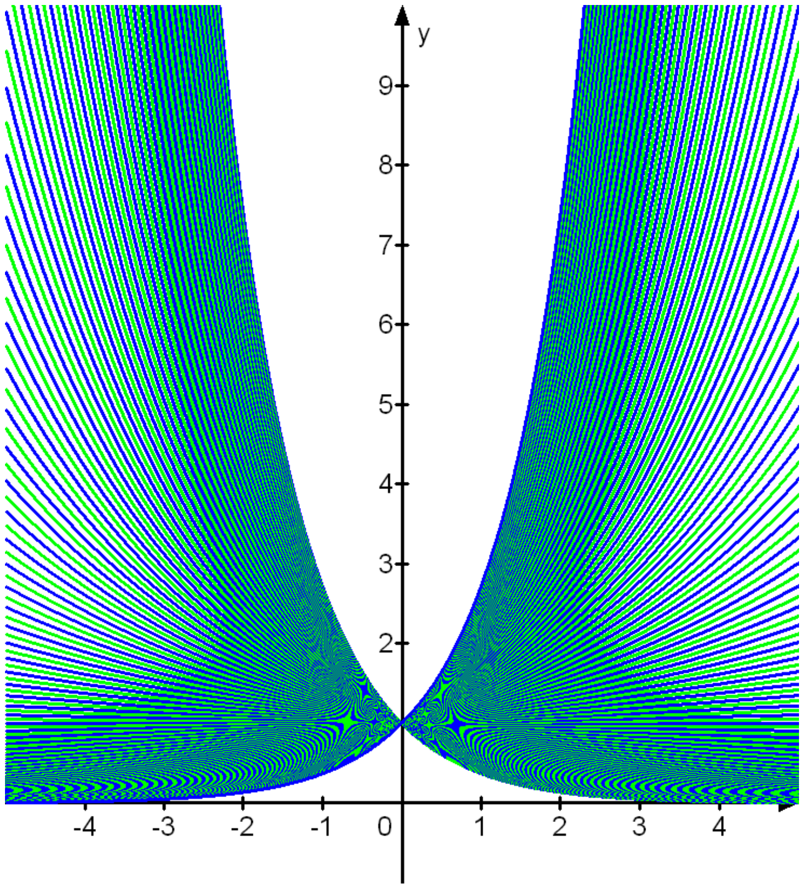
Martin-von-Cochem Gymnasium
Schuljahr: 2007/2008
Fach: Mathematik
Betreuung: Roland Hammes

Facharbeit im Leistungskurs Mathematik

Anwendung eines Funktionsplotters (MatheGrafix) in der Analysis



Verfasser:
Sebastian Rötsch
Kapellenstraße 20
56812 Cochem

Kurzfassung

Ziel dieser Facharbeit ist es, die Verwendung eines Funktionsplotters (hier MatheGrafix) in Teilbereichen der Analysis zu verdeutlichen.

Ein Funktionsplotter ist ein Computerprogramm, welches Funktionsgraphen auf dem Monitor ausgeben kann. Es bestehen jedoch Unterschiede zu Computer-Algebra-Systemen.

Es soll der Umgang mit einem Funktionsplotter erläutert werden und wie man einen Graphen anschaulich präsentiert. Die Einsatzmöglichkeiten sowohl für Schüler als auch für Lehrer werden dargestellt.

In Beispielen werden einzelne Elemente des Plotters erläutert und Sachverhalte der Analysis dargestellt. Es werden Graphen mit Integralen und Rotationskörpern gezeigt. Die Grundidee hinter dem Differenzenquotient und dem Differentialquotient werden bebildert dargestellt.

Inhaltsverzeichnis

1. Überblick

1.1 Was ist ein Funktionsplotter ?

Ein Plotter im Allgemeinen ist ein Zeichengerät, welches mit einer Datenverarbeitungsanlage[1] oder mittels spezieller CAD-Software Vektorgrafiken visuell ausgeben kann. Ein Funktionsplotter (oder auch Funktionenplotter) im speziellen lehnt sich namentlich an diese Geräte an, jedoch ist es kein Ausgabegerät sondern ein Computerprogramm[2].

Dieses Computerprogramm ermöglicht es diverse Funktionen grafisch am Computer darzustellen. Es gibt im zwei verschiedene Arten von Funktionsplottern. Zum einen die Online-Funktionsplotter, welche direkt über den Internetbrowser Eingaben entgegen nehmen. Zum anderen Offline-Funktionsplotter, welche eine Installation vom Benutzer erfordern. Der Umfang von offline Funktionsplottern ist in der Regel größer, da diese auf die wesentlich größeren Leistungsreserven eines Heimcomputers zurückgreifen können.

Ein Funktionsplotter nähert den Graphen an, indem er die Funktionswerte an nahe aneinander liegenden Stellen verbindet. Die so errechneten Graphen werden als Vektorgrafiken auf dem Monitor dargestellt[3].

1.2 Unterschiede zum Computer-Algebra-System (CAS)

Der wesentliche Unterschied zwischen einem Computer-Algebra-System und einem Funktionsplotter ist ihr Einsatzgebiet. Bei Funktionsplottern liegt das Hauptaugenmerk auf der graphischen Darstellung von Funktionen. Computer-Algebra-Systeme hingegen stellen das Auflösen und Ausrechnen von Funktionen in den Vordergrund. Die meisten CAS-Systemen besitzen jedoch auch eine grafische Ausgabe, welche der von Funktionsplottern nahe kommt.

1 [1] Stichwort Plotter
2 [5]
3 [5]

Ein weiterer Unterschied besteht bei Verarbeitung von mathematischen Ausdrücken. Computer-Algebra-Systeme behalten die symbolischen Ausdrücke bei, während Funktionsplotter diese annähern.

1.3 Sinnvoller Einsatz von Funktionsplottern im Unterricht

Der Funktionsplotter kann im modernen Mathematik-, Physik- und Informatikunterricht sinnvoll zum Einsatz kommen. Er stellt eine anschauliche Form der Präsentation dar, so können die Auswirkungen veränderter Werte direkt abgelesen werden. Die sonst langwierigen Berechnungen („per Hand") entfallen und der Unterrichtsstoff kann schneller durchgearbeitet werden..

Im Informatikunterricht kann ein Funktionsplotter von Grund auf als Programm erstellt werden, so können sich die Schüler der Problemstellungen der Informatik bewusst werden. Die Programmierung stellt jedoch eine hohe Anforderung an die Schüler, so könnten manche Schüler resignieren und die Lust am Programmieren verlieren.

In der Physik kann ein Funktionsplotter beispielsweise der Veranschaulichung von dem schiefen Wurf, der Zerfallsrate oder der Aufladung eines Kondensators dienen. Jedoch müssen Einheiten und Eingangsgrößen der Gleichung angepasst werden.

Der Mathematikunterricht zieht den größten Vorteil aus der Nutzung eines Funktionsplotters in der Schule. Schon von den Anfängen des Funktionsbegriffes ab kann der Funktionsplotter die Lernfortschritte der Schüler begleiten. Es können die Abhängigkeiten festgestellt und analysiert werden. Speziell in der Analysis zeigen sich die Stärken und Vorteile des Einsatzes eines Funktionsplotters im Unterricht. Es können die Zusammenhänge der Differenzial- und Integralrechnung dargestellt werden. Graphen können gezeichnet und Wertetabellen erstellt werden. Die so maschinell errechneten Ergebnisse können mit den eigenen Ergebnissen verglichen werden. So werden auch Ungenauigkeiten der handschriftlichen Ausarbeitung (z.B. bei der Zeichnung von Graphen) vermieden.

Lehrkräfte können mittels eines Funktionsplotters die multimedialen Unterrichtsinhalte erhöhen und so den Umgang mit neuen Medien fördern. Um einen Funktionsplotter in den Unterricht einzubeziehen stehen dem Lehrer verschiedene Möglichkeiten bereit. Es können erstellte Graphen auf Kopien oder Overheadfolien gedruckt werden. Bei der Darstellung von Veränderungen bei Parametern ist die Darstellung mittels Beamer zu empfehlen. Für selbständiges Arbeiten sollten jedem Schüler die Möglichkeit bereitstehen einen Funktionsplotter zu bedienen, sei es mittels Laptops oder im Computerraum.

Für Schüler eignet sich der Umgang mit einem Funktionsplotter bei der Ausarbeitung ihrer Hausaufgaben. Sie können ihre Ergebnisse der Aufgaben vergleichen, jedoch besteht hierbei auch die Gefahr, dass die Schüler nicht vergleichen, sondern ohne eigene Leistung die Graphen und Wertetabelle übernehmen.

2. Der Funktionsplotter MatheGrafix

2.1 Funktionsumfang

MatheGrafix ist ein Funktionsplotter, welcher Funktionsgraphen visuell darstellt. Die erzeugten Graphen und Wertetabellen können in Textverarbeitungsprogrammen, wie zum Beispiel Word, eingebunden werden oder als Bitmap verschieden genutzt werden. MatheGrafix hat folgende Funktionen: Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division, Co-/Sinus, Co-/Tangens und ihre Umkehrfunktionen, Wurzeln, Potenzen, Betrag, Auf-/Abrunden, Vorzeichen (Signum), Exponentialfunktion, Logarithmusfunktion und hyperbolische Funktionen.

Bei der Darstellung kann die Farbe, Breite und das Muster der Kurve gewählt werden. Es können sowohl Beschriftungen vorgenommen werden als auch Punkte speziell markiert werden. Senkrechten, Kreise und Flächen lassen sich graphisch aufzeigen. Somit können die wichtigsten Punkte einer Kurvendiskussion oder anderer mathematischer Inhalte festgehalten werden.[4]

4 [8]

2.2 Formatierung

Bei der Eingabe von Funktionen mittels Tastatur in das Programm (MatheGrafix) ist auf die genaue Formatierung zu achten. In Tabelle 1 sind die wichtigsten Funktionstypen und ihre Formatierung in Mathegrafix dargestellt.

mathematischer Ausdruck	Mathegrafix Formatierung
$a+b-c$	a+b-c
$\frac{1}{2}a\cdot b$	(1/2)*a*b
$a^2+\sqrt{c}$	sqr (a) + sqrt (c)
$a^b+\sqrt[b]{a}+\log_b a$	a^b + a^(1/b) + ln(a) /ln(b)
$e^a+\ln a$	exp (a) + ln (a)
$\lvert a\rvert$	abs (a)
$\sin(\pi\cdot x)$	sin (Pi*x)

Tabelle 1

2.3 Anschauliche Darstellung eines Graphen

Das Veranschaulichen von mathematischen Problemstellungen ist eine wichtige Aufgabe von Funktionsplottern. Bei der Anwendung ist jedoch einiges zu beachten.

Zunächst sollten die Graphen (falls mehrere eingezeichnet) farblich gut auseinander zu halten sein, bzw. sind etwaige Zusammenhänge zwischen mehreren Funktionen (ihrer Ableitungen oder Umkehrfunktionen) auch farblich festzuhalten (Abb. 1: bei „Eigenschaft Graph (1.)“). Der gewählte Betrachtungsbereich eines Graphen ist gut zu wählen, so müssen die Achsen eventuell angepasst werden um die nötige Übersicht zu schaffen. Eine Veränderung der Gitternetzlinien schafft zusätzlich Klarheit über den dargestellten Bereich.

Sind nun alle wichtigen Punkte (die Extrema, die Nullstellen, das Verhalten gegen unendlich) zu erkennen, so können diese mittels platzierbarer Orientierungspunkte hervorgehoben und der Graph beschriftet werden. Zusammenhänge können ferner auch mit einer Senkrechten aufgezeigt werden. Um Flächen darzustellen ist es auch notwendig diese einzufärben, welches mittels der Flächenfunktion von MathegGafix geht (Abb. 1: siehe bei Zubehör).

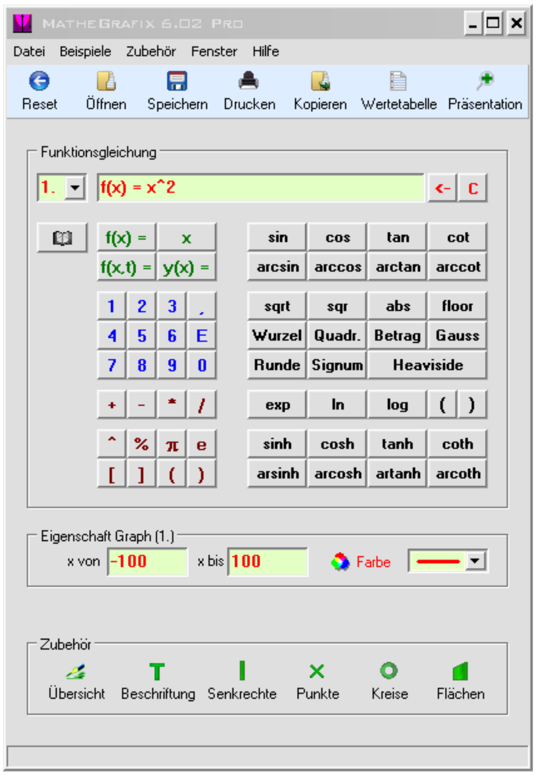


Abbildung 1: MatheGrafix 6.02 Standardansicht

Bei diesen Modifikationen in der Darstellung ist jedoch auch an eine gute Übersicht zu denken, damit die verschiedenen Elemente, welche eigentlich der Veranschaulichung dienen, nicht zu einer unübersichtlichen Präsentation führen.

Neben dem eigentlichen Graph der Funktion dient eine Wertetabelle als Anschauungsmaterial, so ist es bei der Wertetabelle wichtig die Abstände richtig zu wählen um prägnante Punkte hervorzuheben.

3. Beispiele

3.1 Ableitung ganzrationaler Funktion

Bei dem Ableiten einer Funktion wird die Steigung der Funktion in einem Punkt mittels einer Tangente aufgezeigt. Diese Tangente ist wiederum eine Funktion. Die Ableitung einer Funktion wird mittels der Funktion[5]

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$ berechnet.

5 [2] S. 50

Die Ableitung ist meist eine andere Funktion als die Ursprungsfunktion, dies ist nur bei der Expotentialfunktion e^x nicht der Fall. Bei dieser Funktion (und dessen Vielfachen) ist die Ableitungsfunktion mit der Ursprungsfunktion identisch[6]. Aus der errechnete Tangentenfunktion kann man wiederum eine (oder mehrere, bis der höchste Exponent gleich 0 ist) Ableitungen bilden.

Als Beispiel einer ganzrationaler Funktion wurde die Funktion[7]

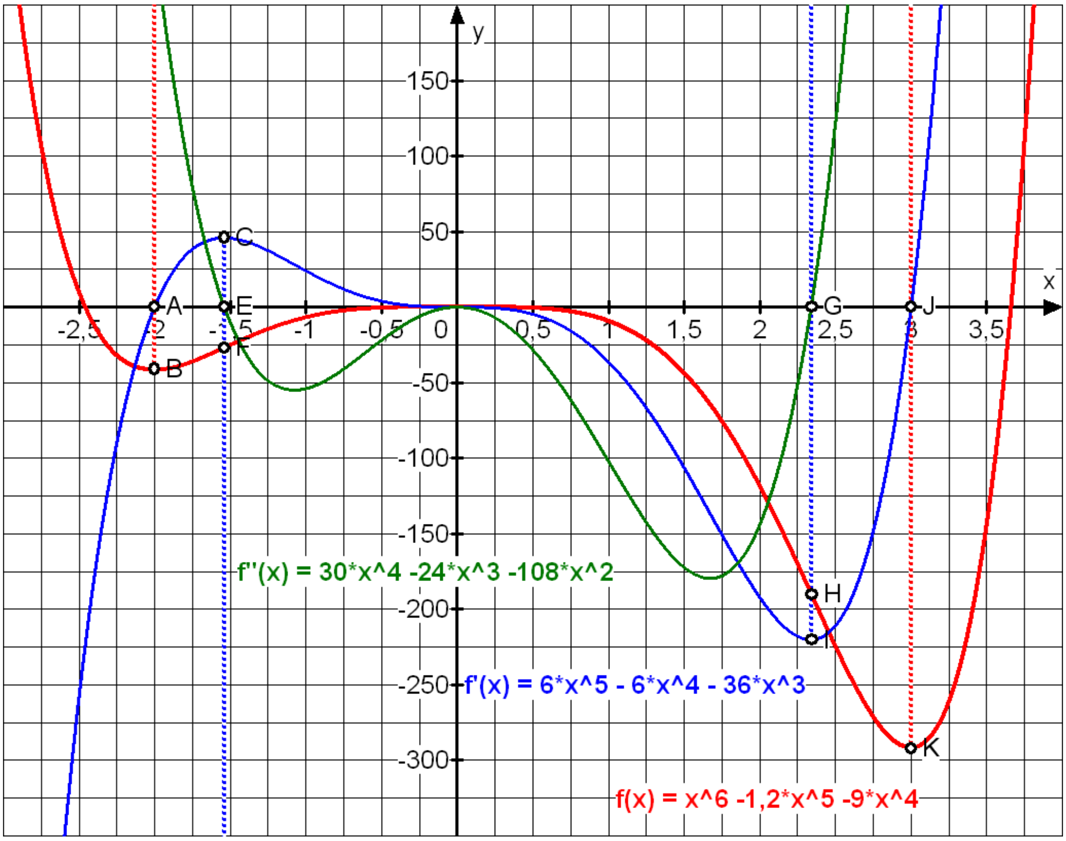


Abbildung 2: Ableitung einer ganzrationalen Funktion

$f(x) = x^6 - 1{,}2\,x^5 - 9\,x^4$ gewählt. In das Schaubild (siehe Abb. 2) wurde die ursprüngliche Funktion, ihre erste und ihre zweite Ableitung eingezeichnet. Um die Übersichtlichkeit zu verbessern wurde die Skalierung 1cm entspricht 50LE für die y-Achse und 1cm entspricht 0,5LE auf der x-Achse eingestellt.

x	-3,5	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5
f(x)	1118	291,6	9,77	-41,6	-25,1	-6,80	-0,51	0,00	-0,58	-9,2	-43,3	-118	-225	-292	-143
f'(x)	-2508	-972	-258	0,00	45,56	24,00	3,94	0,00	-4,69	-36,0	-106	-192	-211	0,00	707,4
f''(x)	4208	2106	871,9	240,0	-10,1	-54,0	-22,1	0,00	-28,1	-102	-172	-144	121,9	810,0	2150

Abbildung 3: Wertetabelle der Funktionen aus Abbildung 2

6 [7]

7 [3]

Die Funktion hat an der Stelle x = -2 ein lokales Minimum, bei x = 0 liegt ein lokales Maximum vor und bei x = 3 ein absolutes Minimum. An diesen Stellen wird die erste Ableitung Null (siehe hier auch Abb. 3). Dies ist durch eine Senkrechte gekennzeichnet. Ebenso wurde der Zusammenhang zwischen der Wendestelle in der Ausgangsfunktion, Extremstelle in der ersten Ableitung und Nullstelle in der zweiten Ableitung hervorgehoben.

3.2 Differenzenquotient

Der Differenzenquotient ist die Steigung zwischen zwei Punkten eines Graphen.

Mit dem Differenzenquotienten[8] $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ wird die Steigung zwischen den Stellen a und b berechnet. Um die Aussagekraft des Differenzenquotienten zu erhöhen sollten die beiden Stellen möglichst nahe bei einander liegen. Um die Steigung in einem Punkt auszurechnen werden die Stellen bis auf einen unendlich kleinen Abstand aneinander gelegt. Diese Annäherung wird durch den Differentialquotienten[9] $f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ ausgedrückt.

In Abbildung 4 ist der Graph der Funktion $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x$ rot eingezeichnet. Grün dargestellt wird eine Schar von Differenzenquotienten. Im Intervall von 0,1 bis 5 werden die verschiedenen Differenzenquotienten mit einem Abstand von je 0,35 abgebildet. Der Differentialquotient ist blau eingezeichnet.

Es ist zu erkennen, dass die Funktionen der Schar sich immer weiter an den Differenzialquotienten annähern.

Die Differenzenquotienten scheinen sich *von links* anzunähern. Dieser Eindruck entsteht dadurch, dass bei großem Abstand h der zweite Funktionswert weiter rechts liegt. Also werden Merkmale die eigentlich weiter rechts liegen schon an dieser Stelle abgebildet.

---

8 [2] S. 42

9 [2] S. 50

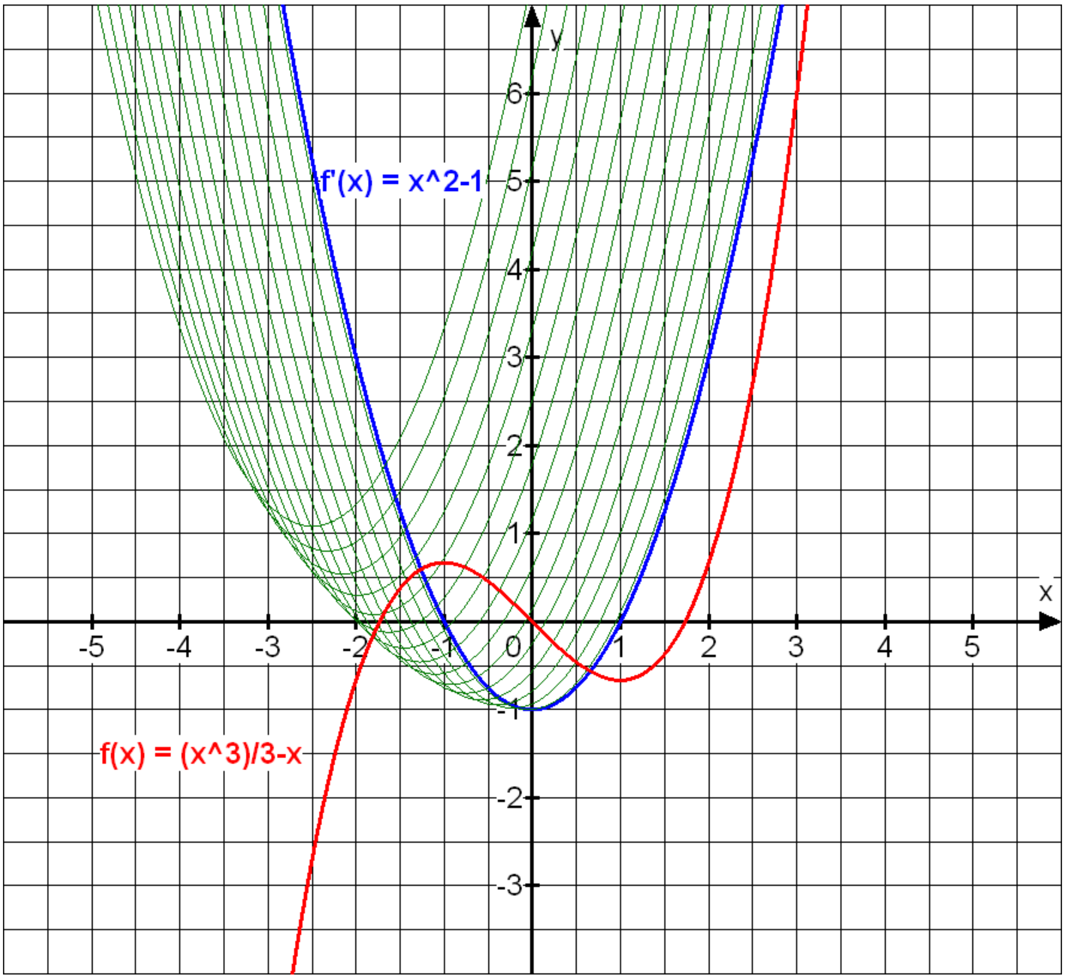


Abbildung 4: Differenzenquotientenschar

3.3 Integral

Um den Flächeninhalt zwischen einer Funktion und der x-Achse zu berechnen wird die Integralrechung verwendet. Die Grundidee hinter der Integralrechnung ist die Zerlegsumme[10] $S_n = h \cdot f(x_n)$. Beim Integrieren wird n gegen unendlich streben gelassen, um so den Flächeninhalt anzunähern. Als Voraussetzung müssen sich die Ober- und Untersummen annähern. Die Annäherung der Ober- und Untersummen ist das Integral. Die Schreibweise für diesen Sachverhalt wurde von Leibniz[11] als $\lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b f(x)\,dx$ für einen Intervall [a;b] eingeführt. Zur Berechnung des Flächeninhaltes zwischen zwei Graphen wird der Integral der unteren Funktion vom Integral der oberen Funktion subtrahiert.

10 [2] S. 155

11 [2] S. 155

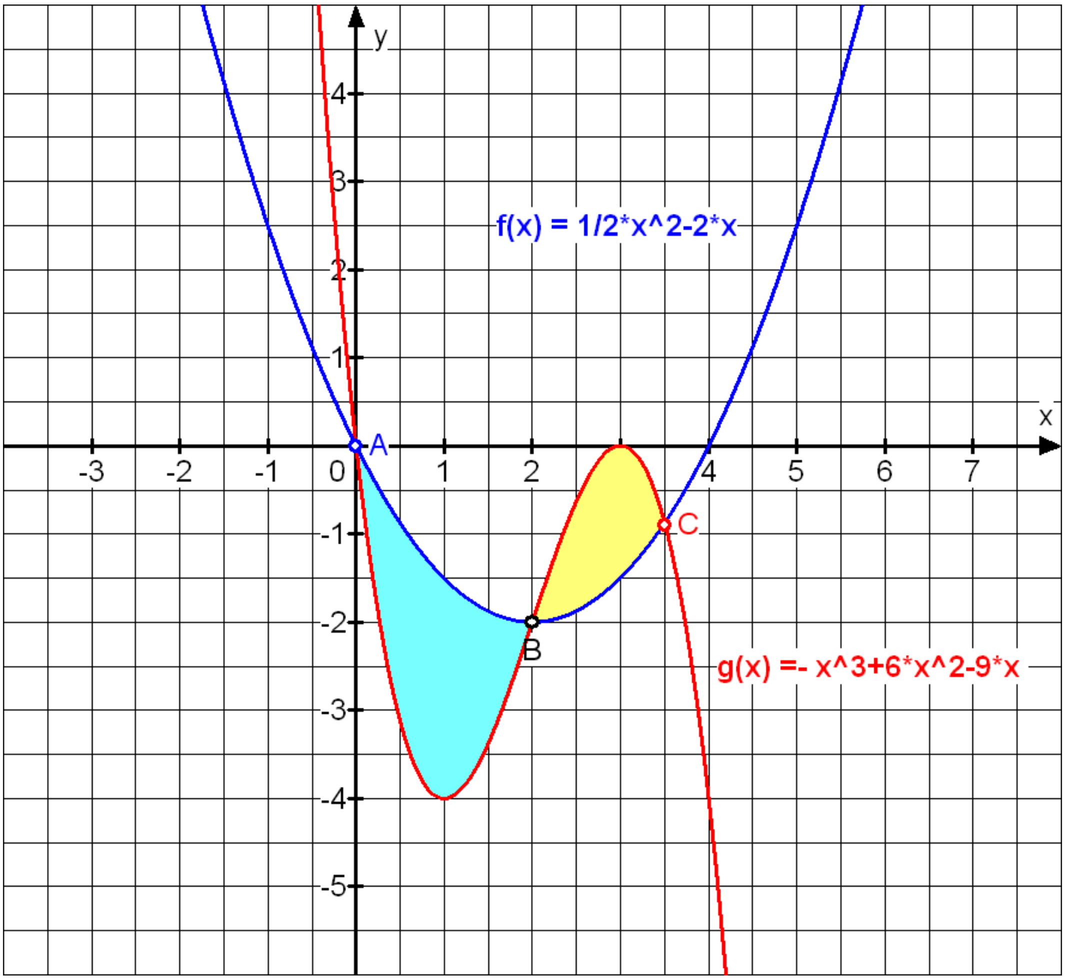


Abbildung 5: Flächen zwischen zwei Graphen

In Abbildung 5 ist der Graph der Funktion[12] $f(x) = -x^3 + 6 \cdot x^2 - 9 \cdot x$ (rot) und der Graph der Funktion[13] $f(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2 - 2 \cdot x$ (blau) gezeichnet. Zudem sind die Flächen, welche zwischen den Graphen eingeschlossen werden türkis und gelb eingefärbt. Die beiden Graphen schneiden sich an den Stellen 0; 2 und 3,5. Die beiden Flächeninhalte werden getrennt berechnet, da jeweils unterschiedliche Funktionen die kleineren Werte haben. Der erste Flächeninhalt (türkis) liegt im Intervall [0;2] und hat den Flächeninhalt $A = \frac{10}{3}$. In diesem Intervall liegt der rot dargestellte Graph unterhalb des blau dargestellten Graphen. Der zweite

12 [2] S. 170

13 [2] S. 170

Flächeninhalt (gelb) liegt im Intervall [2;3,5] und hat den Flächeninhalt $A=\frac{99}{64}$, hier liegt der blaue unter dem roten Graphen. Der Gesamtflächeninhalt beider Teilflächen beträgt $A=\frac{937}{192}$.

3.4 Rotationskörper

Unter Rotationskörpern versteht man den Raum, welchen der Graph einer Funktion der sich um eine Achse dreht bildet. Die Berechnung des Rauminhaltes eines solchen Körpers ist ähnlich der Berechnung des Flächeninhaltes unter einem Graphen, weshalb sie auch den Namen Rotationsintegrale tragen. Das Volumen wird mittels der Funktion[14] $V=\pi\int_{x_1}^{x_2}(f(x))^2\cdot dx$ ermittelt.

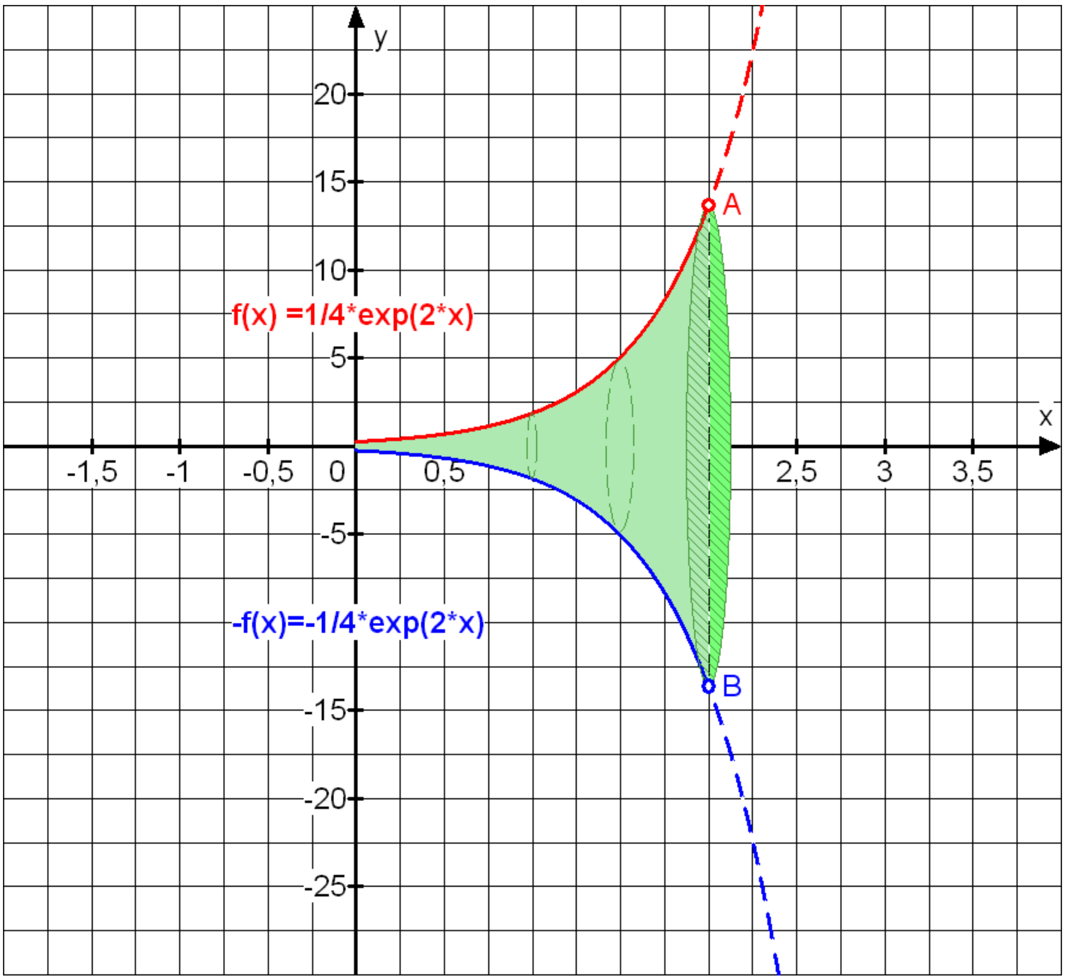


Abbildung 6: Rotationskörper

14 [4] S. 386

Abbildung 6 zeigt einen Rotationskörper. Rot dargestellt ist die Funktion $f(x)=1/4\,e^{2x}$. Diese Funktion rotiert um die x-Achse, was farblich durch eine hell-grün eingefärbte Fläche gekennzeichnet ist. Die gestrichelte Linie bildet den Abschluss des betrachteten Intervalls [0;2], welches den Körper beschränkt. Der blaue Graph der Funktion $f(x)=-1/4\,e^{2x}$ stellt den rotierten Graphen $-f(x)$ dar.

Das Volumen des hier gezeigten Rotationskörpers beträgt $V=(\frac{\pi}{64}\cdot e^{8})-\frac{\pi}{64}$.

4. Fazit und Ausblick

Funktionsplotter sind gut geeignet zum graphischen Darstellen von Funktionen. Dies hilft vor allem in der Mathematik Lösungen zu erkennen. Besonders die Analysis lässt sich mittels eines Funktionsplotters gut charakterisieren.

Funktionsplotter lösen jedoch keine Funktionen (wie CAS-Systeme). So wird diese mathematische Herausforderung dem Benutzer selbst überlassen.

Private Haushalte und Schulen sind in ausreichendem Maße mit Computern ausgestattet. Somit können Funktionsplotter die Schienen zu einem neuen Unterrichts- und Lernprozess ebnen. Die Verwendung macht vor allem im graphischen Bereich Sinn, was das Verstehen erheblich erleichtert.

Quellen

Literatur

(1) Das Bertelsmann Universal Lexikon. Gütersloh/München
Wissen Media Verlag Gmbh 2004

(2) Heidi Buck [u.a]: Lambach Schweizer Analysis (Leistungskurs Gesamtband) Stuttgart: Ernst Klett Verlag GmbH 2001

(3) Kusch; Rosenthal: Lösungsbuch zu Mathematik Teil 3 Differentialrechnung. Essen: W. Girardet Verlag 1966

(4) Kusch; Rosenthal: Lösungsbuch zu Mathematik Teil 4
Integralrechnung. Essen: W. Girardet Verlag 1970

Internetseiten

(5) Wikipedia, http://de.wikipedia.org/wiki/Funktionenplotter (in der Version vom 26. Apr. 2008)

(6) Wikipedia, http://de.wikipedia.org/wiki/Computer-Algebra-System (in der Version vom 3. Mai 2008)

(7) Wikipedia, http://de.wikipedia.org/wiki/Differentialrechnung (in der Version vom 25. Apr. 2008)

(8) MatheGrafix, http://mathegrafix.de

Benutzte Programme

- Open Office (Version 2.0.4) als Textverarbeitungsprogramm
- Paint Shop Pro 7 als Bildbearbeitungsprogramm
- MatheGafix 6.02 (build 10) als Funktionsplotter

Erklärung

Ich erkläre, dass ich die Facharbeit ohne fremde Hilfe angefertigt und nur die im Literaturverzeichnis aufgeführten Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Cochem, 2. Mai 2008 Sebastian Rötsch