Mathematik (Beispielaufgaben Kursarbeit) – Analytische Geometrie – Lösungen

Aufgabe 1: Wandle die Gleichungen der folgenden Geraden und Ebenen in die angegebene Form um.

1.1 $g:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$ in die Koordinatenform.

$I.\quad x_1=2+6t \quad \mid \cdot 2$ $II.\quad x_2=3+4t \quad \mid \cdot 3$	$Ia.\quad 2x_1=4+12t$ $IIa.\quad 3x_2=9+12t \quad \mid II-I$ $\mathbf{-2x_1+3x_2=5}$

1.2 $E:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}6\\4\\-4\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$ in die Koordinatenform und anschließend in die Normalenform.

$I.\quad x_1=2+6r-s \quad \mid 2I+III$ $II.\quad x_2=3+4r \quad \mid \cdot 2$ $III.\quad x_3=-4r+2s$ $Ia.\quad 2x_1+x_3=4+8r \quad \mid Ia.-II.$ $II.\quad 2x_2=6+8r$	$\mathbf{2x_1-2x_2+x_3=-2}$ $\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \left[\vec{x}-\begin{pmatrix}2\\6\\0\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}=0$

1.3 $E: 2x_1-2x_2+3x_3=5$ in die Parameterform und in die Hesse'sche Normalenform.

$2x_1-2x_2+3x_3=5$ $\Leftrightarrow\ x_1=2{,}5+x_2-1{,}5x_3$ $x_2=0+x_2+0$ $x_3=0+0+x_3$ $\Rightarrow \vec{x}=\begin{pmatrix}2{,}5\\0\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-1{,}5\\0\\1\end{pmatrix}$	$\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_0=\frac{1}{\sqrt{4+4+9}}\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}$ $\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}2{,}5\\0\\0\end{pmatrix}\right]\cdot\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}=0$

1.4 Die Ebene E durch die Punkte $A(-2\mid 3\mid 4)$, $B(2\mid 2\mid 2)$ und $C(-1\mid 3\mid 2)$ in die Normalenform, Parameterform und Koordinatenform.

$\vec{AB}=\begin{pmatrix}4\\-1\\-2\end{pmatrix} \quad \vec{AC}=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$ $\Rightarrow \vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\3\\4\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}4\\-1\\-2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$ $I.\quad x_1=-2+4r+s$ $II.\quad x_2=3-r \quad \mid \cdot 6$ $III.\quad x_3=4-2r-2s \quad \mid III.+2I.$	$IIa.\quad 6x_2=18-6r \quad \mid IIa.+IIIa.$ $IIIa.\quad x_3+2x_1=6r$ $\mathbf{2x_1+6x_2+x_3=18}$ $\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\6\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \left[\vec{x}-\begin{pmatrix}-2\\3\\4\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}2\\6\\1\end{pmatrix}=0$

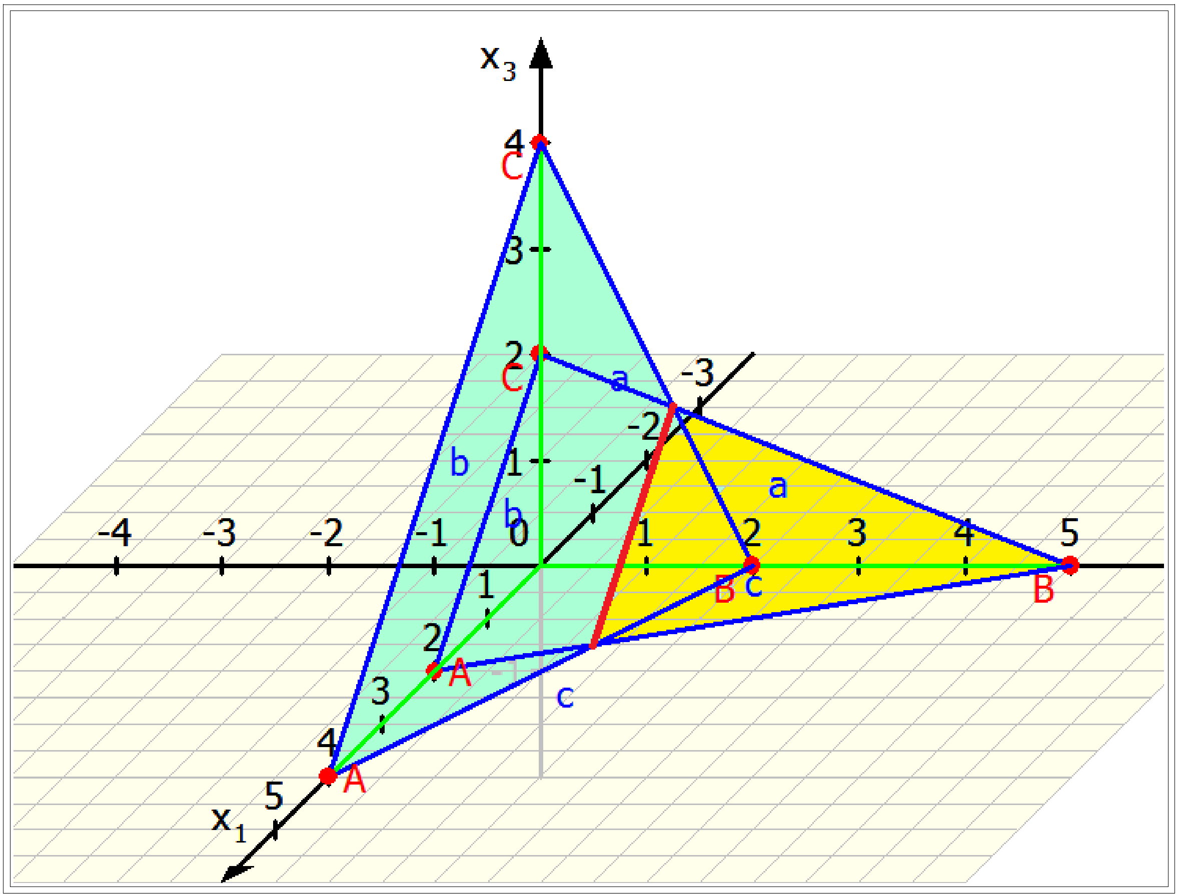
Mathematik (Beispielaufgaben Kursarbeit) – Analytische Geometrie – Lösungen

<u>Aufgabe 2:</u> Zeichne jeweils einen Ausschnitt der beiden Ebenen $E_1:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}-6\\10\\4\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-2\\5\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix}$ und $E_2:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}-4\\2\\4\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-4\\2\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-4\\0\\4\end{pmatrix}$ in ein gemeinsames Koordinatensystem. Berechne und zeichne die Schnittgerade der beiden Ebenen. Färbe die Ebenen farbig korrekt ein, so dass ersichtlich ist, welche Teilflächen verdeckt sind.

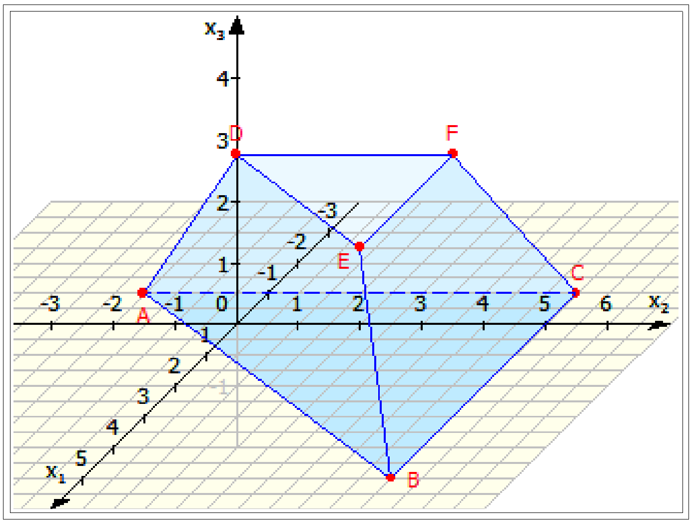
Umwandeln in Koordinatenform (nicht zwingend erforderlich).

Ebene E_1: $I.\quad x_1=-6-2r-2s$ $II.\quad x_2=10+5r \Leftrightarrow r=\frac{1}{5}x_2-2$ $III.\quad x_3=4+2s \Leftrightarrow s=\frac{1}{2}x_3-2$ Einsetzen in I: $x_1=-6-2\cdot\left(\frac{1}{5}x_2-2\right)-2\cdot\left(\frac{1}{2}x_3-2\right)$ $\Leftrightarrow x_1=-6-\frac{2}{5}x_2+4-x_3+4 \quad \mid \cdot 5$ $\Leftrightarrow 5x_1=10-2x_2-5x_3 \quad \mid +2x_2+5x_3$ $\Leftrightarrow 5x_1+2x_2+5x_3=10$ $E_1:\ 5x_1+2x_2+5x_3-10=0$	Ebene E_2: $I.\quad x_1=-4-4r-4s$ $II.\quad x_2=2+2r \Leftrightarrow r=\frac{1}{2}x_2-1$ $III.\quad x_3=4+4s \Leftrightarrow s=\frac{1}{4}x_3-1$ Einsetzen in I: $x_1=-4-4\cdot\left(\frac{1}{2}x_2-1\right)-4\cdot\left(\frac{1}{4}x_3-1\right)$ $\Leftrightarrow x_1=-4-2x_2+4-x_3+4 \quad \mid +2x_2+x_3$ $\Leftrightarrow x_1+2x_2+x_3=4$ $E_2:\ x_1+2x_2+1x_3-4=0$

$I.\ 5x_1+2x_2+5x_3-10=0$ $II.\ x_1+2x_2+x_3-4=0 \quad \mid II.-I.$ $4x_1+4x_3-6=0$ Setze $x_3=t \Rightarrow 4x_1+4t=6 \Leftrightarrow x_1=1{,}5-t$ Setze $x_1=1{,}5-t$ und $x_3=t$ in II. ein: $(1{,}5-t)+2x_2+t-4=0$ $\Leftrightarrow 2x_2=2{,}5 \Leftrightarrow x_2=1{,}25$	Damit ist $x_1=1{,}5-t$ $x_2=1{,}25+0t$ $x_3=0+t$ und somit $\vec{x}=\begin{pmatrix}1{,}5\\1{,}25\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$



Aufgabe 3: Ein Pyramidenstumpf hat eine Grundfläche, die durch die Punkte $A(5|1|3), B(5|5|0)$ und $C(-1|5|0)$ begrenzt ist. Die Schnittfläche des Pyramidenstumpfes wird begrenzt durch die Punkte $D(4|2|4{,}75), E(4|4|3{,}25)$ und $F(1|4|3{,}25)$.



3.1 Zeige, dass die Grundfläche und die Schnittfläche parallel zueinander sind.

Ebene, in der die Grundfläche liegt:

$$E_1:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}5\\1\\3\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}5-5\\5-1\\0-3\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-1-5\\5-1\\0-3\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}5\\1\\3\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}0\\4\\-3\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-6\\4\\-3\end{pmatrix}$$

$$I.\quad x_1=5\qquad -6s \;\Leftrightarrow\; s=-\frac{1}{6}x_1+\frac{5}{6}$$
$$II.\quad x_2=1+4r+4s$$
$$III.\quad x_3=3-3r-3s\quad |\ 3II.+4III.$$ s fällt eh weg, muss also gar nicht erst eingesetzt werden.

Somit $E_1: 3x_2+4x_3=15$

Ebene, in der die Schnittfläche liegt:

$$E_2:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}4\\2\\4{,}75\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}4-4\\4-2\\3{,}25-4{,}75\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1-4\\4-2\\3{,}25-4{,}75\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\\4{,}75\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\-1{,}5\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-3\\2\\-1{,}5\end{pmatrix}$$

$$I.\quad x_1=4\quad -3s \Leftrightarrow s=-\frac{1}{3}x_1+\frac{4}{3}$$

$$II.\quad x_2=2+2r+2s$$

$$III.\quad x_3=4{,}75-1{,}5r-1{,}5s \quad |\ 3II.+4III.$$

s fällt eh weg, muss also gar nicht erst eingesetzt werden. Somit $E_2: 3x_2+4x_3=25$

Normalenvektoren: $\vec{n}_1=\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}$ $\vec{n}_2=\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}$

Die Normalenvektoren sind gleich, also parallel zueinander, also sind auch die Ebenen parallel zueinander.

3.2 Berechne die Koordinaten der (nicht vorhandenen) Pyramidenspitze.

Berechne den Schnittpunkt zweier Kanten: g_1 aus den Punkten A und D. g_2 aus den Punkten B und E.

$$g_1: \vec{x}=\begin{pmatrix}5\\1\\3\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}4-5\\2-1\\4{,}75-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\1\\3\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\1{,}75\end{pmatrix}\qquad g_2: \vec{x}=\begin{pmatrix}5\\5\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}4-5\\4-5\\3{,}25-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\5\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\3{,}25\end{pmatrix}$$

Gleichsetzen: $\begin{pmatrix}5\\1\\3\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\1{,}75\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\5\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\3{,}25\end{pmatrix}\quad \Big|\ -\begin{pmatrix}5\\1\\3\end{pmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad s\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\1{,}75\end{pmatrix}-t\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\3{,}25\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\4\\-3\end{pmatrix}$

$$I.\quad -s+t=0 \quad |\ I.+II.$$

$$II.\quad s+t=4$$

$$III.\ 1{,}75s-3{,}25t=-3$$

$$2t=4 \Leftrightarrow t=2$$

Einsetzen in II.: $s+2=4 \Leftarrow s=2$

Überprüfen in III: $1{,}75\cdot 2-3{,}25\cdot 2=-3 \Leftrightarrow 3{,}5-6{,}5=-3$ wahr

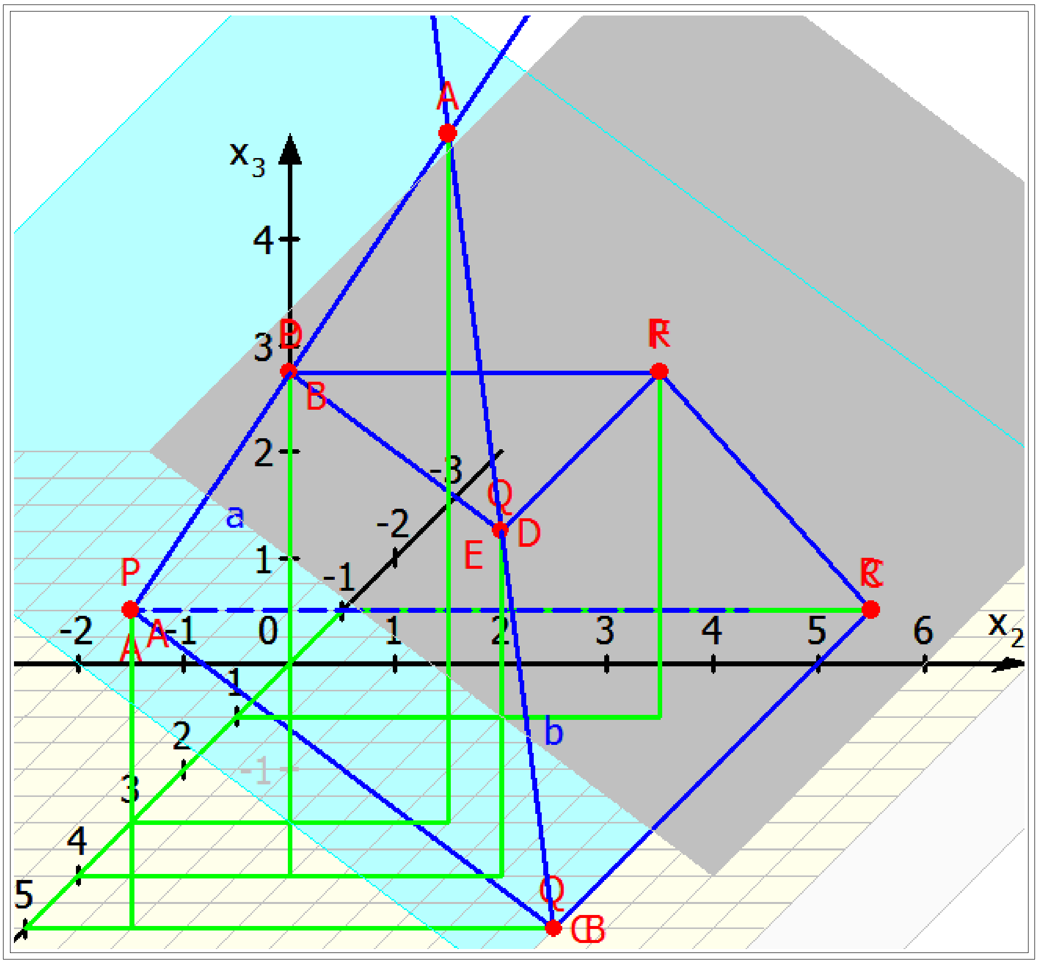
Einsetzen in $g_1: \vec{s}=\begin{pmatrix}5\\1\\3\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\1{,}75\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{3}\\\mathbf{3}\\\mathbf{6{,}5}\end{pmatrix}$

3.3 Berechne die Höhe der (gedachten) vollständigen Pyramide.

Abstand der Spitze von der Ebene der Grundfläche:

$$\boldsymbol{h_0}=\left|\frac{a_1s_1+a_2s_2+a_3s_3-b}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}\right|=\left|\frac{0\cdot 3+3\cdot 3+4\cdot 6{,}5-15}{\sqrt{0^2+3^2+4^2}}\right|=\left|\frac{20}{5}\right|=\mathbf{4}$$

A: Die Höhe des vollständigen Pyramide beträgt 4 L.E.



3.4 Berechne die Höhe des Pyramidenstumpfes.

Da beide Flächen parallel sind, genügt es den Abstand eines Punktes der Schnittfläche von der Ebene der Grundfläche zu bestimmen.

$$\boldsymbol{h_1}=\left|\frac{a_1 s_1+a_2 s_2+a_3 s_3-b}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}\right|=\left|\frac{0\cdot 4+3\cdot 2+4\cdot 4{,}75-15}{\sqrt{0^2+3^2+4^2}}\right|=\left|\frac{10}{5}\right|=\mathbf{2}$$

A: Die Höhe des Pyramidenstumpfes beträgt 2 L.E.

3.5 Berechne das Volumen des Pyramidenstumpfes mit der Formel $V=\frac{1}{3}\cdot h\cdot\left(A_1+\sqrt{A_1 A_2}+A_2\right)$, wobei A_1 und A_2 die Grund- bzw. Schnittfläche sind.

Höhe des Dreiecks der Grundfläche ist der Abstand des Punktes C von der Gerade durch die Punkte A und B. $g_1:\vec{x}=\begin{pmatrix}5\\1\\3\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}0\\4\\-3\end{pmatrix}$ Der Lotfußpunkt F_1 muss auf der Geraden liegen und hat somit die Koordinaten $F_1(5|1+4t|3-3t)$. Der Richtungsvektor von g_1 und der Verbindungsvektor von F_1 und C stehen senkrecht aufeinander.

$$\begin{pmatrix}0\\4\\-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1-5\\5-(1+4t)\\0-(3-3t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\4\\-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-6\\4-4t\\-3+3t\end{pmatrix}=0$$

$$\Rightarrow 0\cdot(-6)+4\cdot(4-4t)+(-3)\cdot(-3+3t)=0$$
$$\Leftrightarrow 16-16t+9-9t=0 \quad | \; -25$$
$$\Leftrightarrow -25t=-25 \quad | \; :(-25)$$
$\Leftrightarrow t=1$ Somit ist $F_1(5|1+4\cdot 1|3-3\cdot 1)=F_1(5|5|0)=B(5|5|0)$

B ist also gleichzeitig der Lotfußpunkt. Damit ist das Dreieck der Grundfläche ein rechtwinkliges Dreieck und die Höhe des Dreiecks ist der Abstand der Punkte B und C.

$$|\vec{BC}|=\sqrt{(-1-5)^2+(5-5)^2+(0-0)^2}=\sqrt{36}=6$$
$$|\vec{AB}|=\sqrt{(5-5)^2+(5-1)^2+(0-3)^2}=\sqrt{16+9}=5$$
Damit ist $A_1=\frac{1}{2}\cdot|\vec{BC}|\cdot|\vec{AB}|=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 5=15$

Wenn das Dreieck der Grundfläche rechtwinklig ist, muss auch das Dreieck der Schnittfläche rechtwinklig sein.

$$|\vec{DE}|=\sqrt{(4-4)^2+(4-2)^2+(3{,}25-4{,}75)^2}=\sqrt{6{,}25}=2{,}5$$
$$|\vec{EF}|=\sqrt{(1-4)^2+(4-4)^2+(3{,}25-3{,}25)^2}=\sqrt{9}=3$$

Damit ist $A_2=\frac{1}{2}\cdot|\vec{DE}|\cdot|\vec{EF}|=\frac{1}{2}\cdot 2{,}5\cdot 3=3{,}75$

Benutze angegebene Formel: $V=\frac{1}{3}\cdot h\cdot\left(A_1+\sqrt{A_1 A_2}+A_2\right)=\frac{1}{3}\cdot 2\cdot\left(15+\sqrt{15\cdot 3{,}75}+3{,}75\right)=\mathbf{17{,}5}$