Erzeugung von Rotationskörpern mit MatheGrafix

1. Rotation um die x-Achse.

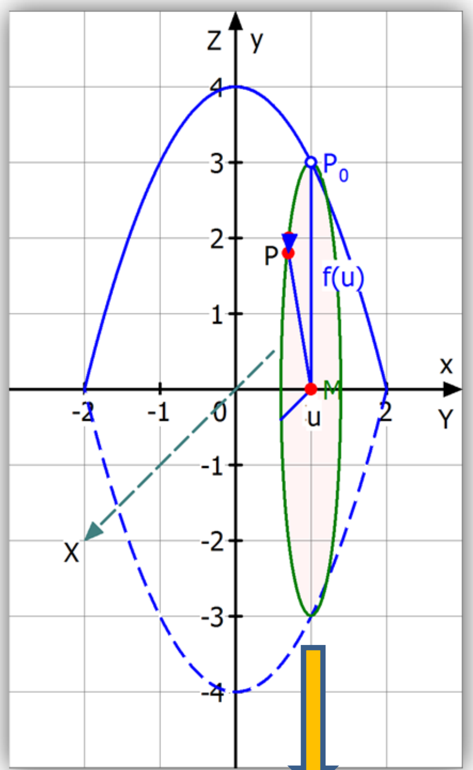
Die Fläche zischen der Parabel und der x-Achse soll um die x-Achse rotieren.

Das Schaubild zeigt zunächst das ebene x-y-Koordinatensystem.

Der Punkt $P_O\left(u\,|\,f(u)\right)$ liegt auf der Parabel.

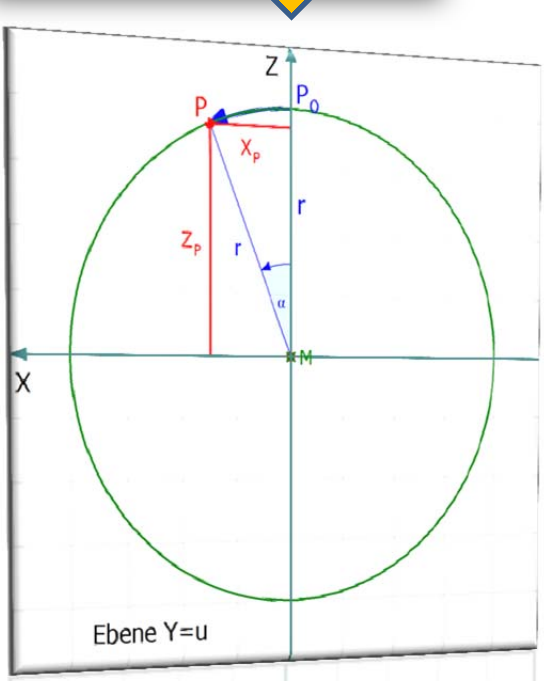
Für die Drehung wird das ebene System in ein räumliches verwandelt: X, Y, Z.

Die Y-Achse deckt sich dann mit der x-Achse.



Berechnung der Koordinaten des Punktes P, der durch die Rotation um die x-(Y-)Achse aus P_O entsteht:

Die folgende Abbildung zeigt die Kreisbahn, die P bei dieser Rotation zurücklegt. Man schaut von rechts auf den Kreis, also entgegen der Y-Achse:



Der rotierende Punkt ist $P_O\left(u\,|\,f(u)\right)$.

Die Kreisbahn liegt somit in der Ebene $Y = u$,
d. h. alle Kreispunkte haben die Y-Koordinate u.

Der Radius der Kreisbahn ist $r = f(u)$

Hat sich P um den Winkel α von der Linie MP_O weggedreht, dann kann man die X- und Z-Koordinaten trigonometrisch bestimmen:

$$\sin\alpha = \frac{X_P}{r} \quad\Rightarrow\quad X_P = r\cdot\sin\alpha = \boxed{f(u)\cdot\sin\alpha}$$

$$\cos\alpha = \frac{Z_P}{r} \quad\Rightarrow\quad Z_P = r\cdot\cos\alpha = \boxed{f(u)\cdot\cos\alpha}$$

Somit gilt für einen Punkt auf der Oberfläche des Rotationskörpers:

$$P\left(f(u)\cdot\sin\alpha\,|\,u\,|\,f(u)\cdot\cos\alpha\right)$$

Der Ortsvektor dieses Oberflächenpunktes ist somit $\vec{x} = \begin{pmatrix} f(u)\cdot\sin\alpha \\ u \\ f(u)\cdot\cos\alpha \end{pmatrix}$

Dies ist also die **Gleichung der Rotationsoberfläche.**

Dazu muss man den Definitionsbereiche der Parameter u und α angeben: $\alpha \in [0\,;\,2\pi]$

u muss je nach Aufgabenstellung festgelegt werden.

Beispiel: $y = f(x) = 4 - x^2$

Die Fläche zwischen K und der x-Achse rotiere um die x-Achse.

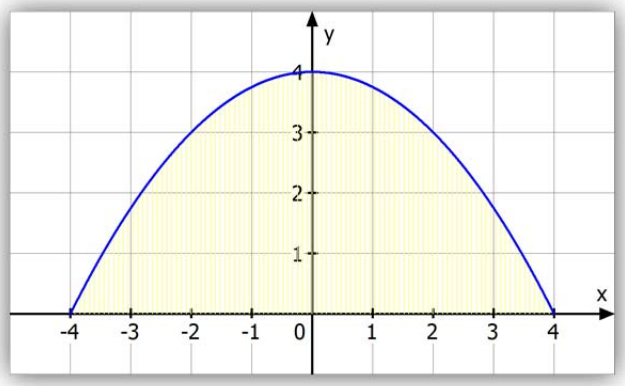
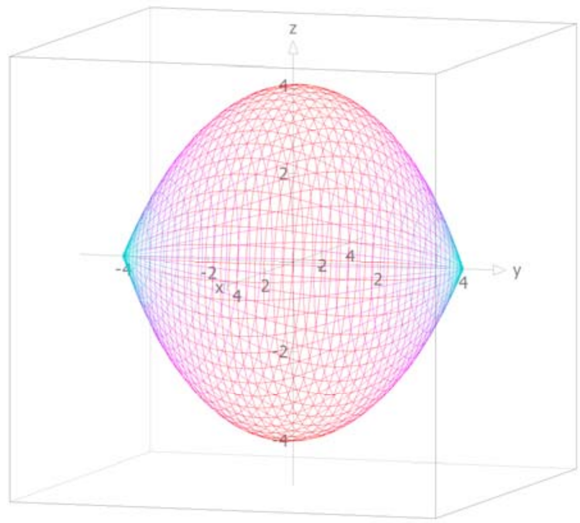


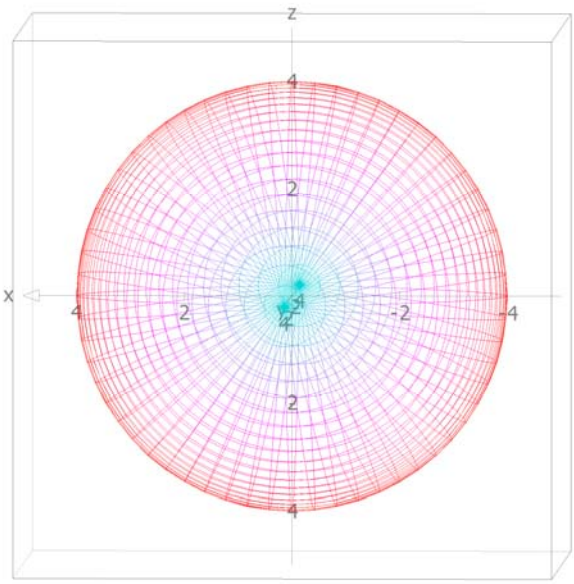
Abb. links:

Schrägbild mit Blick auf die y-z-Ebene.

Abb. rechts:

Blick entgegen der y-Achse auf die x-z-Ebene

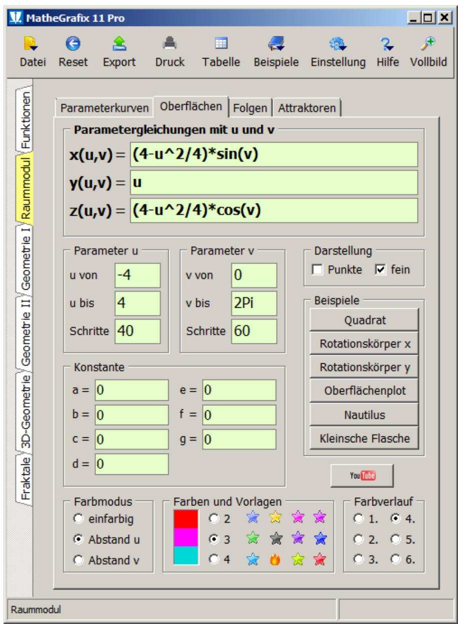




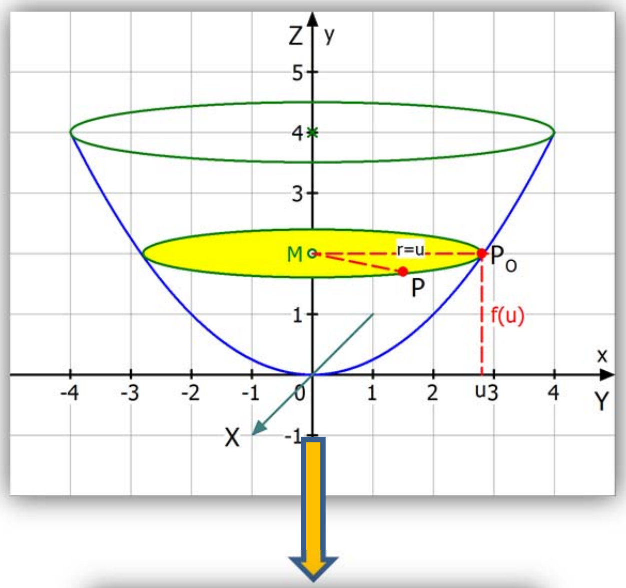
Rechts das Eingabefenster für die Oberfläche.

Man erkennt das Gleichungssystem für die drei Koordinaten:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(u) \cdot \sin(v) \\ u \\ f(u) \cdot \cos(v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(4 - \frac{1}{4}u^2\right) \cdot \sin(v) \\ u \\ \left(4 - \frac{1}{4}u^2\right) \cdot \cos(v) \end{pmatrix}$$



2. Rotation um die y-Achse.



Der Parabelbogen von x = 0 bis x = 4,
die y-Achse und die Parallele zur x-Achse durch den oberen Endpunkt des Bogens schließen eine Fläche ein.
Diese soll um die y-Achse rotieren.

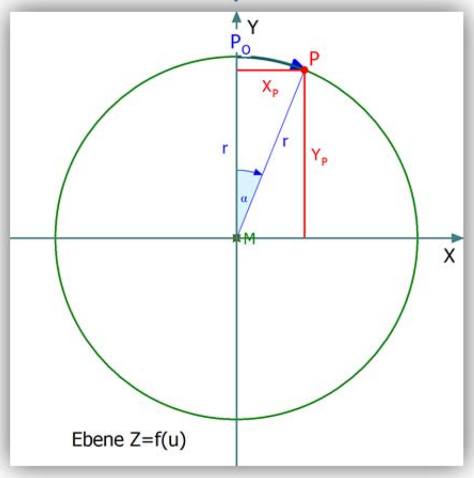
Das Schaubild zeigt zunächst das ebene x-y-Koordinatensystem.

Der Punkt $P_O\left(u \mid f(u)\right)$ liegt auf der Parabel.

Für die Drehung wird das ebene System in ein räumliches verwandelt: X, Y, Z.

Die Y-Achse deckt sich dann mit der x-Achse.

Berechnung der Koordinaten des Punktes P,
der durch die Rotation um die x-(Y-)Achse aus P_O entsteht:



Die folgende Abbildung zeigt die Kreisbahn, die P bei dieser Rotation zurücklegt. Man schaut von oben auf den Kreis, also entgegen der Z-Achse:

Der rotierende Punkt ist $P_O\left(u \mid f(u)\right)$.

Die Kreisbahn liegt somit in der Ebene $Z = f(u)$,

d. h. alle Kreispunkte haben die Z-Koordinate f(u).

Der Radius der Kreisbahn ist $r = u$.

Hat sich P um den Winkel α von der Linie MP_O weggedreht, dann kann man die X- und Y-Koordinaten trigonometrisch bestimmen:

$$\sin\alpha = \frac{X_P}{r} \quad \Rightarrow \quad X_P = r \cdot \sin\alpha = \boxed{u \cdot \sin\alpha}$$

$$\cos\alpha = \frac{Y_P}{r} \quad \Rightarrow \quad Y_P = r \cdot \cos\alpha = \boxed{u \cdot \cos\alpha}$$

Somit gilt für einen Punkt auf der Oberfläche des Rotationskörpers:

$$P\left(u \cdot \sin\alpha \mid u \cdot \cos\alpha \mid f(u)\right)$$

Der Ortsvektor dieses Oberflächenpunktes ist somit $\vec{x} = \begin{pmatrix} u \cdot \sin\alpha \\ u \cdot \cos\alpha \\ f(u) \end{pmatrix}$

Dies ist also die **Gleichung der Rotationsoberfläche.**

Dazu muss man den Definitionsbereiche der Parameter u und α angeben: $\alpha \in [0 ; 2\pi]$

u muss je nach Aufgabenstellung festgelegt werden.

Beispiel: $y = f(x) = \frac{1}{4}x^2$

Die Fläche zwischen K und der x-Achse rotiere um die x-Achse.

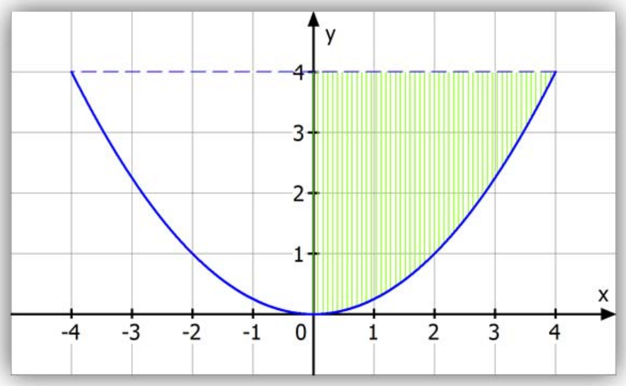


Abbildung links: Ansicht des Körpers in Richtung gegen die z-Achse, also von oben auf die x-y-Ebene.

.

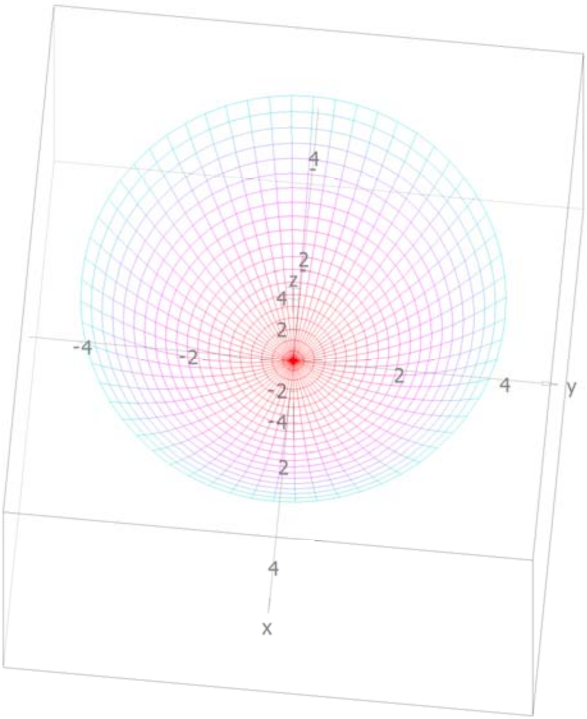
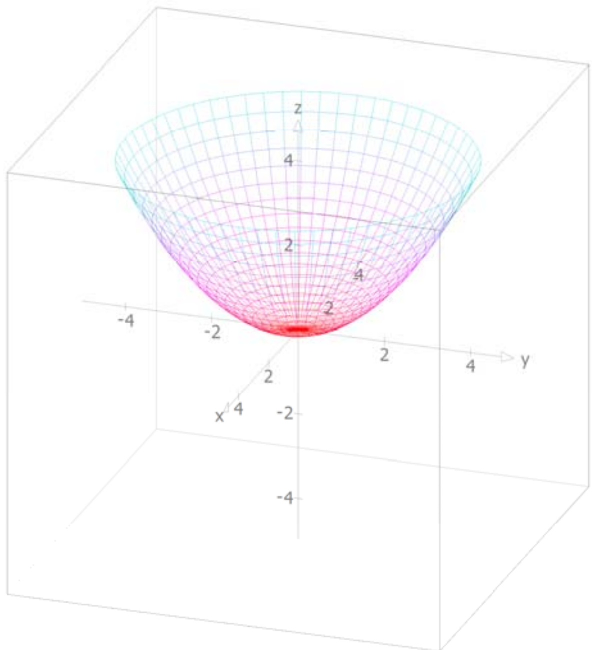


Abbildung rechts: Schrägbild mit Blick auf die x-y-Ebene



Und hier die zugehörenden Einstellungen für MatheGrafix 11.

Man erkennt das Gleichungssystem für die drei

Koordinaten:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \cdot \sin(v) \\ u \cdot \cos(v) \\ f(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}u^2 \cdot \sin(v) \\ \frac{1}{4}u^2 \cdot \cos(v) \\ \frac{1}{4}u^2 \end{pmatrix}$$

Dies ist die Vektorgleichung der Paraboloid-Oberfläche.